7-1-19

Κανόνας L'Hospital

Θεώρημα 1

Έστω $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ με $f(a)=g(a)=0$ κ' $g(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$ κ' f,g παρ/μες στο a κ' $g'(a)\neq 0$. Τότε

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Αν f,g είναι παρ/μες στο $[a,c]$, όπου $c\in(a,b)$ κ' $f'(x)$ $g'(x)$ συνεχής στο a

$$\Rightarrow \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{\lim_{x\to a^+}f'(x)}{\lim_{x\to a^+}g'(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Απόδειξη

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Θεώρημα 2

Έστω f,g συνεχείς στο $[a,b)$ κ' παρ/μες στο (a,b), με $f(a)=g(a)=0$ κ' $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$. Αν

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\Rightarrow \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$$

Παρατήρηση

Δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι f,g συνεχείς στο a. Αρκεί να υποθέσουμε ότι $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=0$

Απόδειξη

Θέτουμε $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,b)\\ 0, & x=a\end{cases}$, $G(x)=\begin{cases} g(x), & x\in(a,b)\\ 0, & x=a\end{cases}$

Απόδειξη

Έστω $l \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τω $\forall x \in (a, a+\delta)$ να ισχύει $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon$

Έστω $x \in (a, a+\delta)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \xlongequal[\exists \xi_x \in (a,x) \subseteq (a, a+\delta)]{\text{ΘΜΤ Cauchy}} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| =$$

$$= \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - l \right| < \varepsilon, \ \forall x \in (a, a+\delta) \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

• Έστω ότι $l = \infty$ (αν $l = -\infty$, ομοίως) $\Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$

$\Rightarrow$ Αν $M > 0$, $\exists \delta > 0$ τω $\forall x \in (a, a+\delta)$, να ισχύει $\frac{f'(x)}{g'(x)} > M$

Για $x \in (a, a+\delta)$ $\exists \xi_x \in (a, x) \subseteq (a, a+\delta)$ τω.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xlongequal[\text{Cauchy}]{\text{ΘΜΤ}} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} > M \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

Παρατήρηση

Αν $g(x) = 0$ για κάποιο $x \in (a,b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,x) \subseteq (a,b)$ τω $g'(\xi) = 0$ ΑΤΟΠΟ $\Rightarrow g(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$

Παράδειγμα

1) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

$\sin x$, $\sqrt{x}$ συνεχείς στο $[0,1)$ κ' ~~..~~ παρ/μες στο $(0,1)$ κ' $\sin 0 = \sqrt{0} = 0$

$\underline{\Theta_2} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim \frac{\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 0$

Το Θ_1 δεν εφαρμόζεται

2) $f, g : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$g(x) = \sin x$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$

$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin 1/x - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin 1/x = 0$

$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$, $x \neq 0$

$f(0) = g(0) = 0$

$f'(0), g'(0)$ υπάρχουν

$g'(0) \neq 0$

$\underline{\Theta_1} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x \sin 1/x - \cos 1/x}{\cos x}$ $\nexists$ το όριο

Άρα το Θ_2 δεν εφαρμόζεται

Στο Θ_2 αν $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\exists$ $\not\Rightarrow$ $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\exists$

$\underline{\text{Θεώρημα 3}}$

Έστω $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$, παρ/μες κ' $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Αν $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, \infty)$ κ' $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$,

$\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Τότε, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Απόδειξη
Θέτουμε $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right), \ 0 < t < 1/a$

$G(t) = g(1/t), \ 0 < t < 1/a$

F, G παρ/μες στο $(0, 1/a)$

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{t\to 0^+} f(1/t) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{t\to 0^+} G(t) = 0, \quad G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'(1/t) \neq 0, \ \forall x \in (0, 1/a)$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{1}{t^2} f'(1/t)}{-1/t^2 \, g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

$$\overset{\Theta_3}{\Rightarrow} \lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = l$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Θεώρημα 4
Εστω $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, παρ/μες με $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$ κ' $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ κ'

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Θεώρημα 5
Εστω $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$, παρ/μες με $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, \infty)$ κ' $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ κ'

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

<u>Απόδειξη</u>

Θέτω $F(t) = f(1/t)$ $\xrightarrow{Θ_4}$ ....

$G(t) = g(1/t)$

<u>Απόδειξη</u> $(l \in \mathbb{R})$

Έστω $0 < \varepsilon < 1$ $\exists \delta > 0$ τω $\forall x \in (a, a+\delta)$

να ισχύει $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon$

Σταθεροποιούμε τυχόν $x_0 \in (a, a+\delta)$

Έστω $x \in (a, x_0)$

<u>Ισχυρισμός</u>

$\exists\ 0 < \delta_1 \leq \delta$ τω $\forall x \in (a, a+\delta_1)$, να ισχύει

$g(x) > g(x_0)$ κ' $g(x) > 0$

Αν όχι, $\exists \{x_n\} \subseteq (a, a+\delta)$ τω $x_n \to a$ κ'

$g(x_n) \leq g(x_0)$ ή $g(x_n) \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow g(x_n) \leq \max\{g(x_0), 0\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) \leq \max\{g(x_0), 0\}$ <u>ΑΤΟΠΟ</u> $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = +\infty$

ΘΜΤ Cauchy $(a < x < x_0) \subseteq (a, x_0) \subseteq (a, a+\delta)$

τω $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - l \right|$

$= \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - l \right| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in (a, a+\delta_1)$,

$$\left| \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}_{>0} - l \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$(l-\varepsilon)(g(x)-g(x_0)) + f(x_0) < f(x) < (l+\varepsilon)(g(x)-g(x_0)) + f(x_0) \Rightarrow$$

$$\frac{(l-\varepsilon)(g(x)-g(x_0)) + f(x_0)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < (l+\varepsilon)(g(x)-g(x_0)) + f$$